Государственное областное автономное образовательное учреждение
«Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»

Рассмотрена и принята на заседании
Педагогического совета ГОАОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»

Протокол от
«31» 08 2018 г. № 1

УТВЕРЖДАЮ:
Директор ГОАОУ «Центр поддержки одаренных детей «Стратегия»
_______________ И.А. Шуйкова

Приказ от
«31» 08 2018 г. № 140/1-п

Образовательная программа по математике 9 класса, реализуемая в форме электронного обучения, с применением дистанционных образовательных технологий

Возраст обучающихся: 15-16 лет
Срок реализации: 1 год.

Авторы программы:
Зелюкина В.С., преподаватель

г. Липецк, 2018

Тема № 1. Графики и ГМТ на координатной плоскости

Цель: систематизировать и углубить знания по теме «Графики и ГМТ на координатной плоскости».

Геометрическим местом точек (сокращенно – ГМТ), обладающих некоторым свойством, называется множество всех точек, которые обладают этим свойством.

Решение задачи на поиск ГМТ должно содержать доказательство того, что все точки множества, указанного в ответе, обладают требуемым свойством, а также наоборот, что все точки, обладающие требуемым свойством, лежат в этом множестве.

Приведем классические и важнейшие известные примеры ГМТ.

Пример. Геометрическое место точек, удаленных от данной точки на заданное положительное расстояние, – окружность (это просто определение окружности).

Пример. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой, – две параллельные прямые.

Пример. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, – серединный перпендикуляр к отрезку.

Пример. Геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон, – биссектриса угла.

ГМТ, обладающих двумя свойствами, является пересечением двух множеств: ГМТ, обладающих первым свойством, и ГМТ, обладающих, вторых свойством.

Разбор заданий:

1. На оси Ox произвольно расположены различные точки $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 3$. Построены все параболы, задаваемые приведёнными квадратными трёхчленами и пересекающие ось Ox в данных точках (и не пересекающие её в других точках). Пусть $y = f_1(x), \ldots, y = f_m(x)$ – соответствующие параболы. Докажите, что парабола $y = f_1(x) + \ldots + f_m(x)$ пересекает ось Ox в двух точках. (Агаханов Н.Х.)

Доказательство. По условию $f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, $f_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)$, ..., $f_{n-1}(x) = (x - x_1)(x - x_n)$, $f_n(x) = (x - x_2)(x - x_3)$, ..., $f_m(x) = (x - x_{n-1})(x - x_n)$, где x_i – координата точки X_i. Поэтому $f_1(x) + ... + f_m(x) = (½\, n(n - 1)x^2 - (n - 1)(x_1 + x_2 + ... + x_n)x + (x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n))$. Найдем дискриминант этого трехчлена:

$$D = (n-1)^2(x_1 + ... + x_n)^2 - 2n(n-1)(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n) =$$
$$(n-1)((x_1^2 + ... + x_n^2)^2 - 2(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n)) =$$
$$= (n-1)((x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + ... + (x_{n-1} - x_n)^2) > 0\,.$$

2. На координатной плоскости нарисованы четыре графика функций вида $y = x^2 + ax + b$, где a, b – числовые коэффициенты. Известно, что есть ровно четыре точки пересечения, причём в каждой пересекаются ровно два графика. Докажите, что сумма наибольшей и наименьшей из абсцисс точек пересечения равна сумме двух других абсцисс. (Шаповалов А.В.)

Доказательство. Абсциссы точек пересечения – это корни уравнений вида $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$, равносильных уравнениям $ax + b = cx + d$. Заменив каждую параболу вида $y = x^2 + ax + b$ на прямую $y = ax + b$, мы не только сохраним абсциссы точек пересечения, *но и не изменим их количество* (у точек с одинаковыми абсциссами ординаты уменьшатся одинаково – на x^2, – и разные точки склеиться не могут). Тем самым мы свели задачу к аналогичной задаче о четырёх прямых. Четыре попарных пересечения (вместо шести возможных) может получиться только в случае двух пар параллельных прямых, поэтому точки пересечения – это вершины параллелограмма. Наименьшая и наибольшая абсцисса – у противоположных вершин, а полусумма абсцисс каждой пары противоположных вершин равна абсциссе центра параллелограмма. Теперь утверждение очевидно.

3. Про функцию $f(x)$ известно следующее: любая прямая на координатной плоскости имеет с графиком $y = f(x)$ столько же общих точек, сколько с параболой $y = x^2$. Докажите, что $f(x) \equiv x^2$. (Шаповалов А.В.)

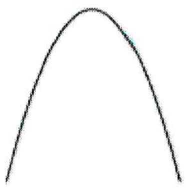
Доказательство. Проведём касательную l к параболе в произвольной точке $A(a,\ a^2)$. Эта касательная имеет с графиком Г функции $f(x)$ ровно одну общую точку. Точки под этой касательной не могут принадлежать Г, поскольку каждая из них лежит на параллельной l прямой, не имеющей общих точек с Г. Точки прямой l, отличные от A, также не могут принадлежать Г: каждая из них находится под какой-то другой касательной к параболе. Следовательно, точка A (а значит, и любая точка параболы) принадлежит Г.

4. На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые l_1 и l_2. Известно, что отрезки, высекаемые графиками на l_1, равны, и отрезки, высекаемые графиками на l_2, также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают. (Голованов А.С.)

Доказательство. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – данные приведённые квадратные трёхчлены, а параболы Γ_1 и Γ_2 – их графики. Тогда существует единственный параллельный перенос, при котором парабола Γ_1 переходит в Γ_2 (это перенос на вектор a, соединяющий вершины парабол). Пусть прямая l_1 пересекает Γ_1 в точках A_1 и B_1, а Γ_2 – в точках A_2 и B_2 так, что $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. При параллельном переносе параболы Γ_1 на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ получается парабола Γ_3, являющаяся графиком приведённого трёхчлена $f_3(x)$, которая пересекает l_1 в тех же точках, что и Γ_2. Значит, разность $f_2(x) - f_3(x)$ имеет хотя бы два корня (абсциссы точек A_2 и B_2). Но поскольку степень многочлена $f_2(x) - f_3(x)$ не выше 1, то $f_2(x) \equiv f_3(x)$, то есть $\Gamma_3 = \Gamma_2$. Значит, вектор a параллелен прямой l_1. Аналогично $a \parallel l_2$, тем самым $a = 0$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Домашнее задание.

1. На листе бумаги построили параболу – график функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0, b > 0$ и $c < 0$, – а оси координат стёрли. Как они могли располагаться? (Изобразите любой пример, соответствующий указанным знакам коэффициентов, не изменяя положения самой параболы.)



2. Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q. Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p + q$? (Седракян Н.)

3. Постройте на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих равенству $\max\{x, x^2\} + \min\{y, y^2\} = 1$.

Разбор вступительной контрольной работы:

Часть 1

(укажите только номер правильного ответа)

1. 1
2. 4
3. 2
4. 2
5. 2
6. 3
7. 1
8. 3

Часть 2

(запишите полное обоснованное решение и ответ)

9. $\frac{6x^2+11x-2}{x-6x^2}=\frac{6x^2+11x-2}{x(1-6x)}=\frac{6x^2+12x-x-2}{x(1-6x)}=\frac{6x(x+2)-(x+2)}{x(1-6x)}=$

$$=\frac{(x+2)(6x-1)}{x(1-6x)}=-\frac{x+2}{x}$$

Ответ: $-\frac{x+2}{x}$.

10. Пусть общие расходы изначально составляют S рублей, тогда расходы на зарплату равны $0{,}25S$, а прочие расходы равны $0{,}75S$.

После уменьшения зарплаты в 8 раз, расходы на нее составили

$$\frac{0{,}25S}{8}=0{,}03125S$$

После чего общие расходы стали равны $0{,}03125S+0{,}75S=0{,}78125S$

Расход на зарплату от общего расхода фирмы составляет

$$\frac{0{,}03125S}{0{,}78125S}\cdot 100\%=4\%$$

Ответ: 4%.

11. $(x+1)^4=(x-3)^4$

$$\sqrt[4]{(x+1)^4}=\sqrt[4]{(x-3)^4}$$

$$|(x+1)|=|(x-3)|$$

$$\left[\begin{array}{ll}x+1=x+3 & (1)\\(x+1)=-(x-3) & (2)\end{array}\right.$$

(1) Нет решений.

(2) $x = 1$

Ответ: $x = 1$.

12. Предположим, что дано 5 любых натуральных чисел.

Если среди этих чисел присутствуют три числа, дающие различные остатки при делении на 3, то найдутся три числа, дающие в сумме число, делящееся на 3.

Если таких чисел нет, то среди пяти чисел найдутся числа, дающие всего два различных остатка. Значит, по принципу Дирихле из пяти чисел как минимум существуют три числа, дающие одинаковый остаток при делении на три. Следовательно, сумма данных трех чисел кратна 3.

13. *Ответ:* $60°$.

Литература:

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.:МЦНМО, 2007. – 472 с.
2. Канель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи / Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. – М.: МЦНМО,2008. - 96 с.
3. Турецкий, Е.Н. Как научиться решать задачи / Е.Н. Турецкий, Л. М. Фридман. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
4. Балаян, Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Балаян Э.Н. 3-е изд. – Р . на/Д: 2008. – 364 с.
5. http://problems.ru/ – задачи по математике.
6. http://mmmf.math.msu.su/ – малый мехмат МГУ.
7. http://www.rusolymp.ru/ – портал Всероссийской олимпиады школьников.
8. https://foxford.ru/wiki – Фоксфорд.Учебник.

Тема №3. Метод математической индукции

Цель: закрепить навык доказательства утверждений методом математической индукции.

Часто требуется доказать утверждение типа: *«Для каждого натурального n верно, что ...»* Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений *«Для n = 1 верно, что ...»*, *«Для n = 2 верно, что ...»*, и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы:

1. Доказать первое из этих утверждений (называемое *базой* индукции).

2. Затем доказать *переход* индукции: *«Если верно утверждение с номером k, то верно утверждение с номером (k + 1).»*

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

Разбор заданий:

1. Несколько прямых разбивают плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в чёрный и белый цвета так, что соседние части будут разного цвета.

Доказательство:

База. Если прямая одна, то частей всего две, так что просто красим их, одну в белый, другую в чёрный.

Шаг. Допустим, для какого-то количества прямых мы умеем раскрашивать плоскость. Что делать, если прямых на единицу больше? Сотрём одну из них и раскрасим плоскость, как будто её и не было (мы ведь допустили, что уже умеем это). Теперь снова добавим её. Получится, что все соседние части по-прежнему разного цвета, за исключением тех, которые до добавления прямой составляли одну часть. Как это исправить? Достаточно перекрасить на противоположный цвет все части, которые находятся по одну сторону от этой прямой, тогда условие будет выполняться.

Теперь, если нас интересует случай, например, 47 прямых, то разобрать его можно так: сначала берём *базу,* она про случай из 1 прямой. Применим *шаг,* получим случай для 2 прямых. Применяем шаг ещё 45 раз, получаем интересующий нас случай 47 прямых. Получается, для любого числа прямых мы можем построить решение, надо лишь сделать достаточно шагов.

В общем, метод *математической индукции* выглядит так:

1. **База.** Разбор какого-то одного случая, как правило для 0 или 1.
2. **Шаг.** То, как пользуясь уже разобранными случаями, разобрать следующий.
3. Подумать, действительно ли до любого случая можно дойти от базы, используя шаги.

2. Доказать, что при любом натуральном n число $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ делится на 3.

Доказательство: Воспользуемся методом полной математической индукции.

1) При n=1 $a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$, поэтому a_1 делится на 3 и утверждение справедливо при $n = 1$.

2) Предположим, что утверждение справедливо при $n = k, k \geq 1$, то есть что число $a_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ делится на 3, и установим, что при $n = k + 1$ число $a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$ делится на 3.

В самом деле, $a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 +$
$+3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k^2 + 3k + 3) =$
$= a_k + 3(k^2 + 3k + 3)$

Т.к. каждое слагаемое делится на 3, то их сумма также делится на 3.

Тема №4. Последовательности и прогрессии

Цель: обобщить и систематизировать знания, умения и навыки по теме «Последовательности и прогрессии».

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел $\{a^n\}, n \in N$, у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, т.е. $a_{n+1} = a_n + d$, где d – разность арифметической прогрессии, a_1 – первый член арифметической прогрессии, a_n – общий член арифметической прогрессии.

При любом $n \geq 2$ можем записать

$$a_{n+1} - a_n = d$$
$$a_n - a_{n-1} = d,$$

таким образом, $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, т.е. каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних членов. Это *характеристическое свойство* арифметической прогрессии.

Пусть задана арифметическая прогрессия с a_1 и d. Выведем формулу общего члена арифметической прогрессии:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

и т.д. Следовательно, $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Для арифметической прогрессии $\{a^n\}, n \in N$ с разностью d имеет место следующая формула $a_n = a_k + (n-k)d, 1 \leq k \leq n-1$, где $n, k \in N$. Таким образом, *n*-ый член арифметической прогрессии может быть найден также через любой предшествующий член a_k последовательности и разность d этой прогрессии.

$$\left.\begin{matrix} a_n = a_{n-k} + kd \\ a_n = a_{n+k} - kd \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$

Сумма $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ – сумма первых *n* членов арифметической прогрессии. Сложим две такие последовательности: $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = 2S_n$, значит, $2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1+a_n)}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$.

Если нужно просуммировать члены арифметической прогрессии, начиная с *k*-ого члена, то $S_k^n = S_n - S_{k-1}$.

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел *n*, у которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего путём умножения на одно и то же число $q \neq 0$, т.е. $b_{n+1} = b_n q$, где q – знаменатель геометрической прогрессии, b_1 – первый член геометрической прогрессии, b_n – общий член геометрической прогрессии.

Для геометрической прогрессии $\{b_n\}$ со знаменателем q при $n \geq 2$ $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \Longrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. Значит, три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда квадрат одного из них равен произведению двух других. *Это характеристическое свойство* геометрической прогрессии.

Формула общего члена геометрической прогрессии выводится следующим образом:

$$b_2 = b_1 q$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3$$

и т.д. Следовательно, $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Общий член b_n может быть выражен через любой предшествующий ему член, если известен номер этого члена и знаменатель: $b_n = b_k q^{n-k} = b_{n-k} q^k$.

Сумма $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии b_n со знаменателем $q \neq 1$ $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, так как

$$S_n(1-q) = S_n - S_n q =$$
$$= b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} - (b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n) =$$
$$= b_1 - b_1 q^n = b_1(1-q^n).$$

Если $q = 1$, то очевидно, что $S_n = b_1 n$.

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если её знаменатель q по модулю меньше единицы.

Замечание. Вообще, это определение неудачно, так как такая прогрессия является убывающей, только если и первый член и знаменатель прогрессии положительны.

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому сумма n первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии неограниченно приближается с ростом n.

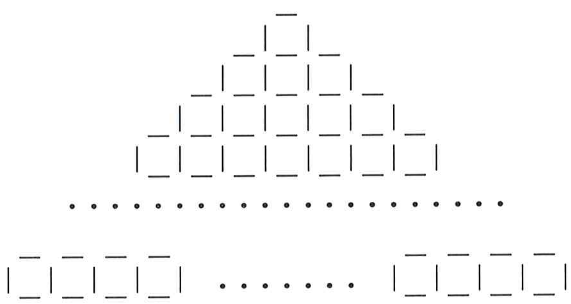
$S = \frac{b_1}{1-q}$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Смешанные задачи на прогрессии.

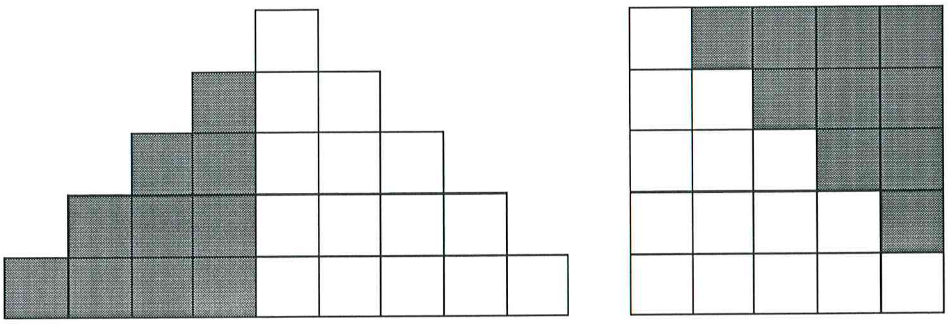
Очень распространены задачи, в условиях которых говорится о двух прогрессиях сразу: арифметической и геометрической. Как правило, для решения этих задач достаточно учесть *характеристические* свойства этих прогрессий.

Разбор заданий:

1. На клетчатой бумаге нарисована фигура (см. рис.): в верхнем ряду – одна клеточка, во втором сверху – три клеточки, в следующем ряду – 5 клеточек, и т.д., всего рядов – n. Докажите, что общее число клеточек есть квадрат некоторого числа.



Решение: Ниже на рисунке показано, как фигуру, данную в условии задачи, разрезать на две части (квадраты в одной из частей перечёркнуты) и из этих частей сложить квадрат. Количество клеточек в квадрате, нарисованном на клетчатой бумаге, очевидно, равно квадрату количества клеток, расположенных вдоль его стороны.



Таким образом, мы не только показали, что количество клеточек равно квадрату некоторого числа (что требовалось в условии задачи), но и нашли это число (n), то есть показали, что $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ ($n > 0$).

2. А и Б стреляют в тире, но у них есть только один шестизарядный револьвер с одним патроном. Поэтому они договорились по очереди случайным образом крутить барабан и стрелять. Начинает А. Найдите вероятность того, что выстрел произойдёт, когда револьвер будет у А.

Решение: Выстрел происходит на нечётной попытке (когда револьвер у А), в остальные попытки выстрела не происходит. Следовательно, искомая вероятность есть сумма $\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \ldots = \frac{6}{11}$.

Ответ: $\frac{6}{11}$.

3. *Последовательность Фарея n*-ного порядка представляет собой возрастающий ряд всех несократимых дробей, знаменатель которых меньше или равен n:

$$F_n \stackrel{def}{=} \left\{ \frac{a_i}{b_i} :\ 0 \le a_i \le b_i \le n,\ GCD(a_i,\ b_i) = 1,\ \frac{a_i}{b_i} < \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} \right\}.$$

Рассмотрим все рациональные числа между нулём и единицей, знаменатели которых не превосходят n, расположенные в порядке возрастания (ряд Фарея). Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – какие-то два соседних числа (дроби несократимы). Доказать, что $|bc - ad| = 1$.

Решение: Можно считать, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} \le \frac{a+1}{b}$, которое выполняется при $a + 1 \le b$, показывает, что $b \neq d$, то есть знаменатели двух соседних дробей не могут быть одинаковыми.

Докажем требуемое утверждение индукцией по n.

База. При $n = 3$ получаем числа $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$; для них утверждение легко проверяется.

Шаг индукции. При переходе от $n - 1$ к n к старому набору чисел добавляются некоторые числа вида $\frac{k}{n}$. Согласно сделанному выше замечанию два новых числа не могут быть соседними, поэтому $\frac{a}{b} < \frac{k}{n} < \frac{c}{d}$, где $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – соседние числа из старого списка. Нужно доказать, что оба числа $A = kb - an$ и $B = cn - kd$ равны 1 (ясно, что эти числа положительны).

Предположим, что одно из них больше 1. Тогда $b + d < bB + dA = (bc - ad)n = n$ $(bc - ad = 1$ по предположению индукции). Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ показывает, что числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не могут быть соседними. Противоречие.

Домашнее задание.

1. Докажите методом математической индукции:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

3. Найдите сумму *6+66+666+…+666..6*, где в записи последнего числа присутствуют n шестерок.

Разбор домашнего задания (модуль №2):

1. Графики трёх функций $y = ax + a$, $y = bx + b$ и $y = cx + d$ имеют общую точку, причём $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$?

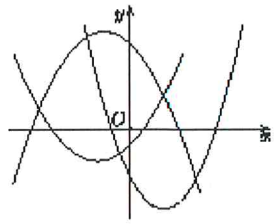
Решение:

$$\begin{cases} y = ax + a \\ y = bx + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax + a \\ (a-b)(x+1) = 0 \end{cases};$$

Так как $a \neq b$, то решением системы уравнений будет (-1;0). Так как графики трех функций имеют общую точку, то(-1;0) принадлежит графику функции $y = cx + d$, тогда $0 = -c + d, c = d$.

Ответ: обязательно.

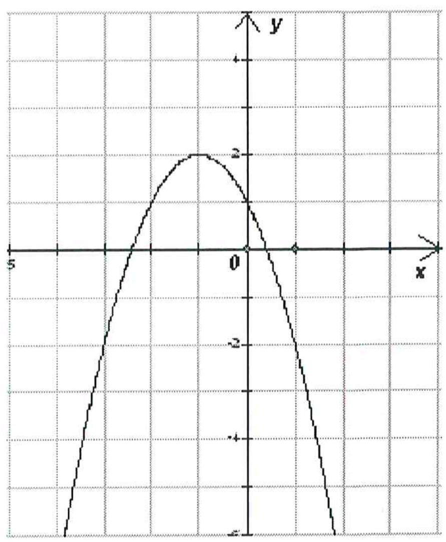
2. На рисунке изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Можно ли подобрать такие числа a, b и c, чтобы это были графики трёхчленов $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$?



Решение: Пусть это удалось. У двух парабол «ветви» направлены вверх, а у одной – вниз, поэтому у двух трёхчленов старший коэффициент положительный, а у одного – отрицательный. Следовательно, среди чисел a, b и c должны быть два положительных и одно отрицательное. С другой стороны, две из парабол пересекают ось Oy в точках с отрицательными ординатами, а третья – в точке с положительной ординатой, поэтому у двух трёхчленов свободный член отрицательный, а у одного – положительный. Следовательно, среди чисел a, b и c должны быть два отрицательных и одно положительное. Противоречие.

Ответ: нельзя.

3. На координатной плоскости изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$ (см. рис.). На этой же координатной плоскости схематически изобразите график функции $y = cx^2 + 2bx + a$.

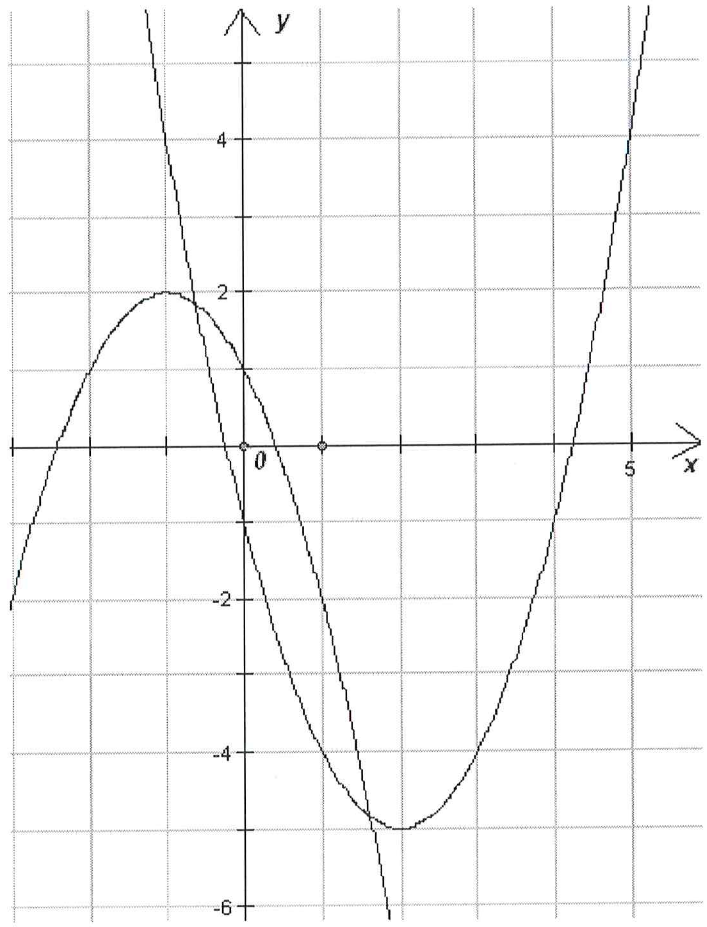


Решение: Данный график получается параллельным переносом графика функции $y = -x^2$, поэтому $a = -1$. Значение $b = -2$ вычисляется из равенства $-\frac{b}{2a} = -1$ (абсцисса вершины параболы), а c $= y(0) = 1$.

Следовательно, искомый график задается уравнением

$$y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5.$$

Ответ: см. рис.



Литература:

1. Галицкий М.Л. и др. Сборник задач по алгебре дл 8-9 классов:Учеб. пособие дл учащихся с углубленным изучением математики.- М.:Просвещение, 2010.

2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.:МЦНМО, 2007. – 472 с.

3. Канель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи / Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. – М.: МЦНМО,2008. - 96 с.

4. Турецкий, Е.Н. Как научиться решать задачи / Е.Н. Турецкий, Л. М. Фридман. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

5. Балаян, Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Балаян Э.Н. 3-е изд. – Р . на/Д: 2008. – 364 с.

6. Корянов, А.Г. Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений / Корянов А.Г., Прокофьев А.А. 2011

7. Старков, В.Н. 165 задач с параметрами / Старков В.Н.

8. http://problems.ru/ – задачи по математике.

9. http://mmmf.math.msu.su/– малый мехмат МГУ.

10. http://www.rusolymp.ru/ – портал Всероссийской олимпиады школьников.

11. http://math-info.hse.ru/f/2011-12/auto-old/ling/lecture3.pdf – Дискретная математика ВШЭ.

Тема № 2. Функции одной переменной

Цель: ввести и закрепить определения функции, области определения функции и графика функции.

Как заметил Г.Галилей, книга природы написана на математическом языке и её буквы – математические знаки и геометрические фигуры – невозможно понять её слова. И именно функция является тем средством математического языка, которое позволяет описывать процессы движения, изменения, присущие природе.

Впервые функция вошла в математику под именем «переменная величина» в знаменитом труде французского математика и философа Р. Декарта «Геометрия» (1637г.). С развитием науки понятие функции уточнялось и обобщалось.

Пусть даны числовое множество X и правило f, которое ставит в соответствие каждому элементу x из множества X определённое число y, тогда считают, что задана **функция** $y=f(x)$ с **областью определения** X $(x \in X)$. Переменная x называется **независимой переменной** (или аргументом), переменная y называется **зависимой переменной**. Область определения функции принято обозначать — $D(f)$. Множество всех значений функции $y=f(x)$ называется областью значений функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции $y=f(x)$, $x \in X$ называется множество точек $(x,\ y)$ координатной плоскости XOY, таких что $x \in X$, $y=f(x)$.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Существуют различные способы задания функции. Перечислим основные способы.

Аналитическое задание функции

В этом случае функцию задают с помощью формулы $y=f(x)$, где $f(x)$ представляет собой некоторое выражение с переменной x.

Графическое задание функции

В этом случае на координатной плоскости задают линию, для всех точек которой абсцисса точки принадлежит области определения функции, а ордината равна соответствующему значению функции.

Тем самым на области определения задаётся функция $y = f(x)$, $x \in X$.

Табличное задание функции

В этом случае приводится таблица, в которой указывают значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента.

Свойства функций

Чётные и нечётные функции

Функция $y = f(x)$ называется **чётной**, если её область определения симметричное относительно O множество и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ для любого x из области определения функции. График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется **нечётной**, если её область определения симметричное относительно O множество и для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Периодические функции

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует отличное от нуля число T, такое что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$. Число, кратное T, называется периодом функции.

Монотонные функции

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на промежутке, если какие бы два значения аргумента, принадлежащие этому промежутку, ни взять, окажется, что большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Линейная функция

Функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b — действительные числа, называется **линейной функцией**. Если, в частности, $k = 0$, то получаем постоянную функцию $y = b$; если $b = 0$, то получаем прямую пропорциональность $y = kx$.

Свойства линейной функции $y=kx+b$, $k\neq 0$, $b\neq 0$:

1) областью определения является множество всех действительных чисел;
2) функция $y=kx+b$ не является ни чётной, ни нечётной;
3) при $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой прямой.

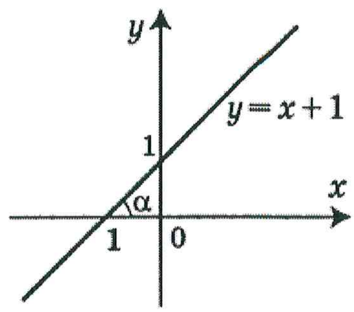


Рис. 1.1

Графиком линейной функции является прямая (рис. 1.1). Число k называется угловым коэффициентом прямой, оно равно тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению луча оси OX, т. е. $k=\operatorname{tg}\alpha$.

Функция $y=\frac{k}{x}$

Функция, заданная формулой $y=\frac{k}{x}$, где $k\neq 0$, называется **обратной пропорциональностью.** Число k называют коэффициентом обратной пропорциональности.

Свойства функции $y=\frac{k}{x}$:

1) областью определения является множество всех действительных чисел, кроме нуля;
2) функция $y=\frac{k}{x}$ является нечётной функцией;
3) при $k>0$ функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и на промежутке $(0;\ +\infty)$; при $k<0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и на промежутке $(0;\ +\infty)$.

Графиком обратной пропорциональности является гипербола (рис. 1.2). Если $k>0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях (рис. 1.2*а*), если $k<0$, то ветви гиперболы расположены во II и IV координатных четвертях (рис. 1.2*б*). Прямые

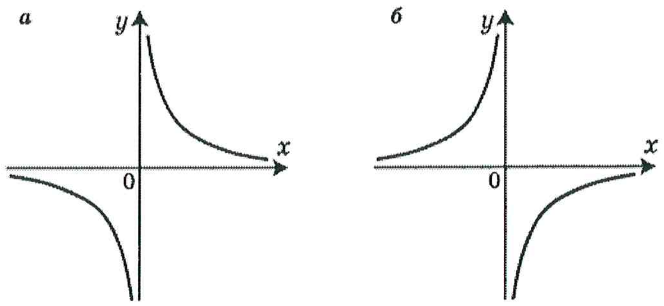


Рис. 1.2

$y=0$, $x=0$ (оси абсцисс и ординат) являются соответственно горизонтальной и вертикальной асимптотами графика функции $y=\frac{k}{x}$.

Дробно-линейная функция

Функция, заданная формулой $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — произвольные действительные числа, $c\neq 0$, $ad-bc\neq 0$, называется **дробно-линейной функцией**. Графиком является гипербола, с асимптотами — горизонтальная: $y=\frac{a}{c}$, вертикальная: $x=-\frac{d}{c}$ (рис. 1.3).

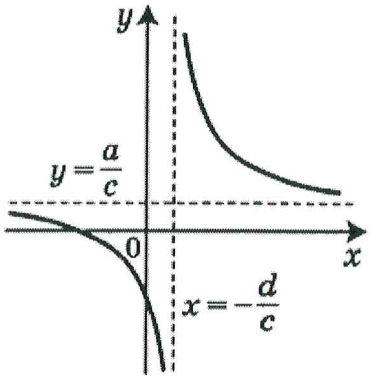


Рис. 1.3

Квадратный трёхчлен. Квадратичная функция

Квадратным трёхчленом называется многочлен вида ax^2+bx+c, где x — переменная, a, b, c — некоторые действительные числа, $a\neq 0$.

Корнем квадратного трёхчлена называется значение переменной, при котором значение этого трёхчлена равно нулю.

Если x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида ax^2+bx+c, где x — независимая переменная, a, b, c — некоторые числа, $a\neq 0$. При $a=1$, $b=c=0$ квадратичная функция принимает частный вид $y=x^2$.

Свойства функции $y=x^2$:

1) областью определения является множество всех действительных чисел;
2) функция $y=x^2$ является чётной функцией;
3) функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$ и возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$.

Графиком функции $y=x^2$ является парабола (рис. 1.4).

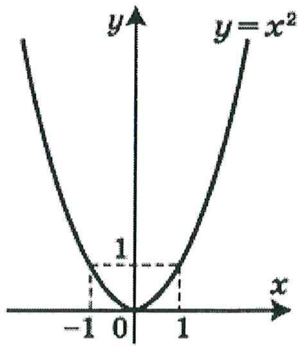


Рис. 1.4

Степенная функция с натуральным показателем

Функция, заданная формулой $y=x^n$, где n — натуральное число, называется **степенной функцией с натуральным показателем.** В частности, при $n=1$ получаем линейную функцию $y=x$, при $n=2$ получаем квадратичную функцию $y=x^2$, при $n=3$ получаем функцию $y=x^3$, графиком которой является кубическая парабола.

Свойства функции $y=x^3$:

1) областью определения является множество всех действительных чисел;
2) функция $y=x^3$ является нечётной функцией;
3) функция возрастает на всей области определения.

Вообще, пусть n — произвольное чётное натуральное число, большее двух: $n=4,\ 6,\ 8,\ \ldots$. В этом случае свойства функции $y=x^n$ аналогичны свойствам функции $y=x^2$. График такой функции похож на график параболы (рис. 1.5).

Пусть n — произвольное нечётное число, большее трёх: $n=5,\ 7,\ 9,\ \ldots$. В этом случае свойства функции $y=x^n$ аналогичны свойствам функции $y=x^3$. График такой функции похож на график кубической параболы (рис. 1.6).

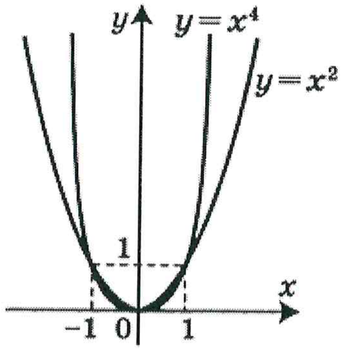


Рис. 1.5

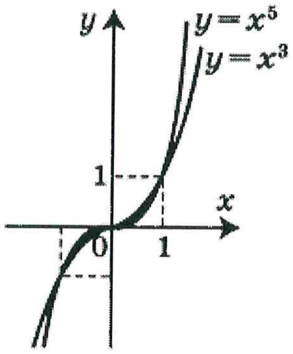


Рис. 1.6

Функция $y=\sqrt[n]{x}$

Свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$ при n — чётное:

1) областью определения является промежуток $[0;\ \infty)$;
2) функция возрастает на всей области определения;
3) функция $y=\sqrt[n]{x}$ при $n>1$ является обратной к функции $y=x^n$ на промежутке $[0;\ \infty)$. Их графики симметричны относительно биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей (рис. 1.7a).

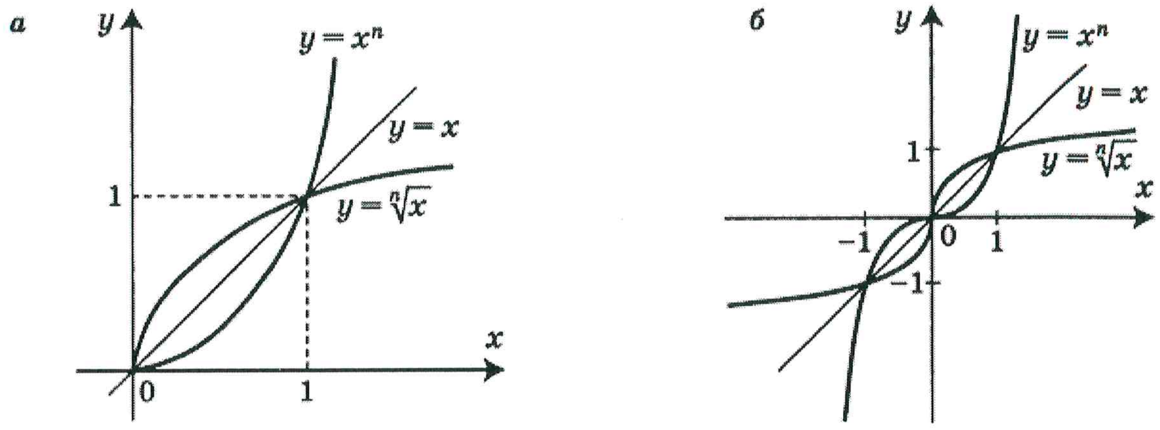


Рис. 1.7

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ при n — нечётное:

1) **областью определения является промежуток $(-\infty;\ \infty)$;**
2) **функция возрастает на всей области определения;**
3) **функция $y = \sqrt[n]{x}$ при $n > 1$ является обратной к функции $y = x^n$. Их графики симметричны относительно биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей (рис. 1.7*б*).**

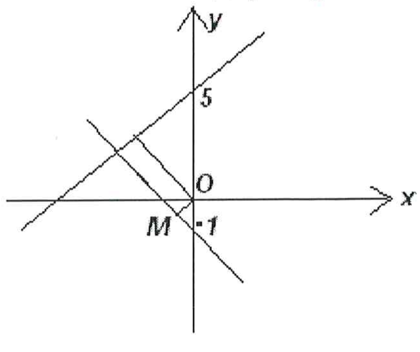
Разбор заданий:

1. Найдите наименьшее значение $x^2 + y^2$, если $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$.

Решение:

$x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = (x + 3)^2 - (y - 2)^2 = (x + y + 1)(x - y + 5) = 0.$

Таким образом, график полученного уравнения состоит из двух прямых $y = -x - 1$ и $y = x + 5$, которые пересекают ось ординат в точках $(0, -1)$ и $(0, 5)$ (см. рис.). $x^2 + y^2$ – квадрат расстояния от точки $M(x, y)$ до начала координат, поэтому, его значение будет наименьшим, когда M – основание перпендикуляра, опущенного из точки $O(0, 0)$ на ближайшую к этой точке прямую. Учитывая, что обе прямые отсекают от осей координат равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 5, получим, что ближе к точке O находится прямая $y = -x - 1$, тогда $OM = 0,5$.



Ответ: 0,5.

2. На оси Ox произвольно расположены различные точки $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 3$. Построены все параболы, задаваемые приведёнными квадратными трёхчленами и пересекающие ось Ox в данных точках (и не пересекающие её в других точках). Пусть $y = f_1(x), \ldots, y = f_m(x)$ – соответствующие параболы. Докажите, что парабола $y = f_1(x) + \ldots + f_m(x)$ пересекает ось Ox в двух точках. (Агаханов Н.Х.)

Решение 1: По условию $f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, $f_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)$, ..., $f_{n-1}(x) = (x - x_1)(x - x_n)$, $f_n(x) = (x - x_2)(x - x_3)$, ..., $f_m(x) = (x - x_{n-1})(x - x_n)$, где x_i – координата точки X_i. Поэтому $f_1(x) + \ldots + f_m(x) = (\frac{1}{2} n(n-1)x^2 - (n-1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n))$.

Найдем дискриминант этого трёхчлена:

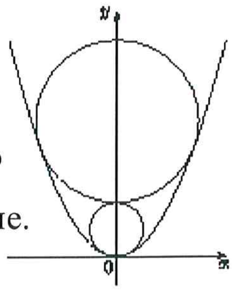
$$D = (n-1)^2(x_1 + \ldots + x_n)^2 - 2n(n-1)(x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n) =$$
$$(n-1)((x_1^2 + \ldots + x_n^2)^2 - 2(x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n)) =$$
$$= (n-1)((x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2) > 0\,.$$

Решение 2: Прибавив к удвоенной сумме $2S = 2(f_1(x) + \ldots + f_m(x))$ слагаемые $y_1 = (x - x_1)^2, \ldots, y_n = (x - x_n)^2$, получим

$$2S_1 = ((x - x_1) + (x - x_2) + \ldots + (x - x_n))^2 = (nx - (x_1 + \ldots + x_n))^2.$$

Видно, что S_1 обращается в ноль в точке $x_0 = {}^1/_n\,(x_1 + \ldots + x_n)$. Но $S < S_1$, так как $y_i \geq 0$ и не более одного числа из y_i может равняться нулю. Значит, $S(x_0) < 0$, что и доказывает утверждение задачи.

3. Внутри параболы $y = x^2$ расположены несовпадающие окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается ветвей параболы и внешним образом окружности ω_{n-1} (см. рис.). Найдите радиус окружности σ_{1998}, если известно, что диаметр ω_1 равен 1 и она касается параболы в её вершине. (Медников Л.Э., Евдокимов М.А.)



Решение: Докажем по индукции, что радиус r_n окружности ω_n равен $n - \frac{1}{2}$, а её центр – точка $(0, n^2 - n + \frac{1}{2})$.

База дана в условии.

Шаг индукции. Верхняя точка окружности ω_n имеет ординату $n^2 - n + \frac{1}{2} + n - \frac{1}{2} = n^2$. Поэтому центр окружности ω_{n+1} радиуса $n + \frac{1}{2}$, касающейся σ_n в верхней точке имеет координаты $(0,\ n^2 + n + \frac{1}{2})$. Значит, уравнение окружности σ_{n+1} имеет вид

$$x^2 + (y - n^2 - n - \tfrac{1}{2})^2 = (n + \tfrac{1}{2})^2 \text{ или } x^2 + (y - n^2)^2 - 2(y - n^2)(n + \tfrac{1}{2}) = 0.$$

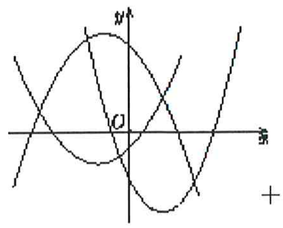
Подставляя в него y вместо x^2, получим

$y - n^2 + (y - n^2)^2 - 2(y - n^2)(n + \frac{1}{2}) + n^2 = 0$, то есть $(y - n^2 - n)^2 = 0$. Таким образом, это уравнение имеет единственное решение $y = n^2 + n$. Следовательно, окружность ω_{n+1} имеет с параболой $y = x^2$ ровно две общие точки (с указанной ординатой). Это и значит, что она *касается* параболы.

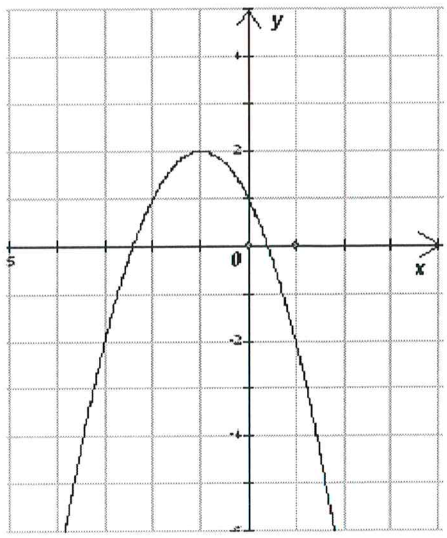
Ответ: $r_{1998} = 1997{,}5$.

Домашнее задание.

1. Графики трёх функций $y = ax + a$, $y = bx + b$ и $y = cx + d$ имеют общую точку, причём $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$?



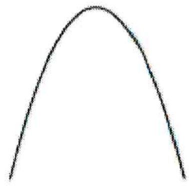
2. На рисунке изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Можно ли подобрать такие числа a, b и c, чтобы это были графики трёхчленов $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$?

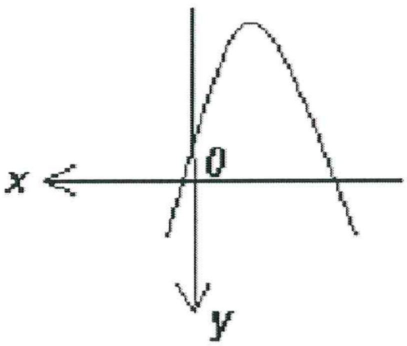


3. На координатной плоскости изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$ (см. рис.). На этой же координатной плоскости схематически изобразите график функции $y = cx^2 + 2bx + a$.

Разбор домашнего задания модуля 1

1. На листе бумаги построили параболу – график функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0, b > 0$ и $c < 0$, – а оси координат стёрли. Как они могли располагаться? (Изобразите любой пример, соответствующий указанным знакам коэффициентов, не изменяя положения самой параболы.)





Решение: Так как $a > 0$, то ветви параболы «раскрыты» вдоль положительного направления оси ординат. Так как $c < 0$, то точка пересечения графика с осью ординат имеет отрицательную ординату. Так как $-\frac{b}{2a} < 0$, то вершина параболы находится в полуплоскости $x < 0$.

2. Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q. Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p + q$? (Седракян Н.)

Решение. Пусть A и B – вершины парабол. Рассмотрим третью параболу, симметричную первой относительно середины отрезка AB. Она имеет вершину B и содержит точку A. Поскольку парабола *однозначно определяется своей вершиной и ещё одной точкой*, третья парабола совпадает со второй. Значит, старшие коэффициенты исходных парабол отличаются только знаком.

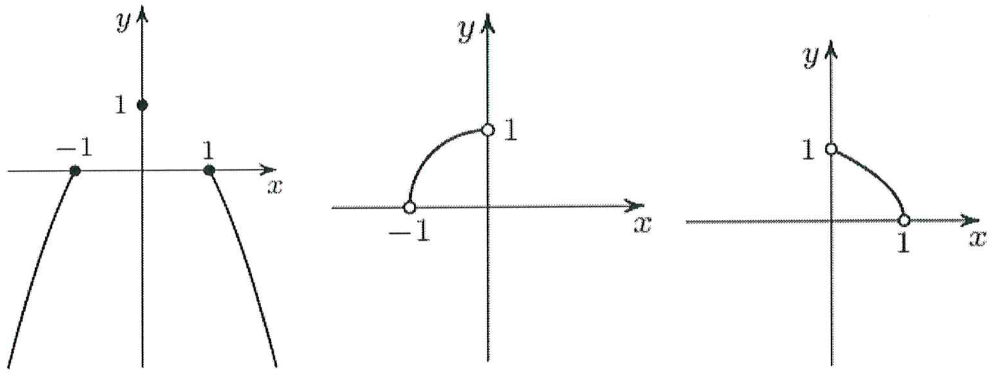
Ответ: 0.

3. Постройте на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих равенству $max\,\{x, x^2\} + min\,\{y, y^2\} = 1$.

Решение. Заметим, что $t > t^2 \Leftrightarrow 0 < t < 1$. Поэтому требуется рассмотреть 4 случая.

1) $x \le 0$ или $x \ge 1$, $y \le 0$ или $y \ge 1$. Тогда равенство примет вид $x^2 + y = 1$. При $y > 1$ оно выполняться не может, значит, графиком является часть параболы $y = 1 - x^2$, где $y \le 0$ или $y = 1$ (рис. слева).

2) $x \le 0$ или $x \ge 1$, $0 < y < 1$. Тогда равенство примет вид $x^2 + y^2 = 1$. При $x \ge 1$ равенство выполняться не может, значит, график – четверть окружности с выколотыми концами (рис. в центре).

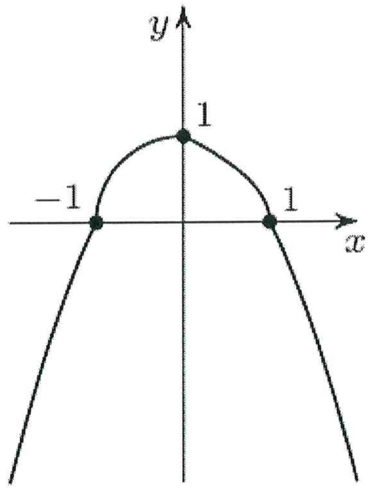


3) $0 < x < 1$, $y \le 0$ или $y \ge 1$. Тогда равенство примет вид: $x + y = 1$. При указанных значениях переменных оно не выполняется.

4) $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Равенство примет вид: $x + y^2 = 1$. Графиком является часть параболы $y^2 = 1 - x$, где $0 < x < 1$ (рис. справа).

Искомое множество точек является объединением этих графиков.

Ответ.



Литература:

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.:МЦНМО, 2007. – 472 с.
2. Глизбург В.И. Математика. ГИА. Комплексная подготовка. 2012
3. Канель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи / Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. – М.: МЦНМО,2008. - 96 с.
4. Турецкий, Е.Н. Как научиться решать задачи / Е.Н. Турецкий, Л. М. Фридман. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
5. Балаян, Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Балаян Э.Н. 3-е изд. – Р . на/Д: 2008. – 364 с.
6. http://problems.ru/ – задачи по математике.
7. http://mmmf.math.msu.su/ – малый мехмат МГУ.
8. http://www.rusolymp.ru/ – портал Всероссийской олимпиады школьников.

8. https://foxford.ru/wiki – Фоксфорд.Учебник.